Aula 25 1/2

Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 25** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 15/06, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 82 a 85 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 37 a 41 **Cálculo de y_p usando o Método da Variação das Constantes**

Notas: • Este método pode-se usar em qualquer EDO linear completa

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x) \quad , a_n(x)\neq 0$$

• Só devem usar este método se não der para usar o Método dos coeficientes indeterminados (última aula)

Suponhamos que $\boxed{y_H = C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\dots+C_n\varphi_n(x)}$, $C_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$

Pelo método da variação das constantes tem-se que

$$\boxed{y_p = C_1(x)\varphi_1(x)+C_2(x)\varphi_2(x)+\dots+C_n(x)\varphi_n(x)}$$ $C_i(x)$ são agora funções

onde as derivadas $C_i'(x)$ são determinadas pelo sistema do slide 38.

$$n=1 \rightsquigarrow C_1'(x)\varphi_1(x)=\frac{b(x)}{a_1(x)}$$

$$n=2 \rightsquigarrow \begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x)+C_2'(x)\varphi_2(x)=0 \\ C_1'(x)\varphi_1'(x)+C_2'(x)\varphi_2'(x)=\dfrac{b(x)}{a_2(x)} \end{cases}$$

$$n=3 \rightsquigarrow \begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x)+C_2'(x)\varphi_2(x)+C_3'(x)\varphi_3(x)=0 \\ C_1'(x)\varphi_1'(x)+C_2'(x)\varphi_2'(x)+C_3'(x)\varphi_3'(x)=0 \\ C_1'(x)\varphi_1''(x)+C_2'(x)\varphi_2''(x)+C_3'(x)\varphi_3''(x)=\dfrac{b(x)}{a_3(x)} \end{cases}$$

Notas: • Ver demonstração do caso $n=1$ na pág. 82 dos apontamentos teóricos

• Ver exercício resolvido nos slides 40 e 41

Exercício 1: Determinar a solução geral das seguintes EDOs usando o método da variação das constantes.

a) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

b) $y'' + y = \operatorname{tg} x \ , \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

c) $y''' - y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$

$\boxed{\text{Slide 45}}$ **Existência e unicidade de solução num PVI**

Teorema: Se $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas num intervalo I, $a_n(x) \neq 0, \ \forall x \in I$, então o problema de valores iniciais (PVI)

$$\begin{cases} a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0 \ , \quad y'(x_0) = \beta_1 \ , \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases}$$

onde $x_0 \in I$ e β_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$, são n.os reais dados, tem em I uma e uma só solução.

Exercício 2: Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} y''' + y'' - 5y' + 3y = 6 \operatorname{senh}(2x) \\ y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 0 \ , \quad y''(0) = 4 \end{cases}$$

TPCs: Folha prática 4: 17, 19f), 20, 22, 23

2.º teste, 19/06/2019 → Ex 3b)
Ex. Recurso, 08/07/2019 → Ex 5b)
} podem usar quer o método dos coeficientes indeterminados quer a variação das constantes

Aula 25

1) a) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$ (feito na última -> ex. 1 b)

$a_2(x)$; $b(x)$

Objetivo: Determinar a solução geral: $y = y_H + y_P$ → Usar agora o método da variação das constantes

1ª Etapa: Calcular y_H

→ Ver última aula ⇝ $y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$e^{-x} \to f_1(x)$, $e^{3x} \to f_2(x)$

2ª Etapa: Calcular y_p (usando o método da variação das constantes

1º Passo: Escrever a expressão de $y_P = C_1(x) f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + c_m(x) f_m(x)$

$$y_p = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) e^{3x}$$

2º Passo: Resolver o sistema adequado para determinar $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_m'(x)$

$$m=2 \rightsquigarrow \begin{cases} c_1'(x) f_1(x) + c_2'(x) f_2(x) = 0 \\ c_1'(x) f'(x) + c_2'(x) f_2'(x) = \dfrac{b(x)}{a_2(x)} \end{cases}$$

C. aux.

$f_1(x) = e^{-x} \rightsquigarrow f_1'(x) = -e^{-x}$

$f_2(x) = e^{3x} \rightsquigarrow f_2'(x) = 3e^{3x}$

Nota: $b(x) = 3e^{2x}$

$a_2(x) = 2$

$$\begin{cases} c_1'(x) e^{-x} + c_2'(x) e^{3x} = 0 \\ c_1'(x)(-e^{-x}) + c_2'(3e^{3x}) = \dfrac{3e^{2x}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{c_1'(x) e^{-x}} = -c_2'(x) e^{3x} \\ \boxed{-c_1'(x) e^{-x}} + 3c_2'(x) e^{3x} = \dfrac{3e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ -(-c_2'(x) e^{3x}) + 3c_2'(x) e^{3x} = \dfrac{3e^{2x}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 4c_2'(x) e^{3x} = \dfrac{3e^{2x}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ c_2'(x) = \dfrac{3e^{2x}}{8e^{3x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \boxed{c_2'(x) = \frac{3}{8} e^{-x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) e^{-x} = -\frac{3}{8} e^{-x} e^{3x} \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} c_1'(x) = -\frac{3}{8} e^{3x} \\ c_2'(x) = \frac{3}{8} e^{-x} \end{cases}}$$

3º Passo: Primitivar cada $c_i'(x)$ para obter $c_i(x)$

$$\begin{cases} c_1(x) = \int -\frac{3}{8} e^{3x} dx = -\frac{1}{8} \int 3e^{3x} dx = -\frac{1}{8} e^{3x} \\ c_2(x) = \int \frac{3}{8} e^{-x} dx = -\frac{3}{8} \int -e^{-x} dx = -\frac{3}{8} e^{-x} \end{cases}$$

4º Passo: Substituir as expressões de $C_i(x)$ na expressão de y_p do 1º passo e simplificar

$$y_p = -\frac{1}{8}\underbrace{e^{3x}\times e^{-x}}_{e^{2x}} - \frac{3}{8}\underbrace{e^{-x}\times e^{3x}}_{e^{2x}} \Leftrightarrow y_p = -\frac{4}{8}e^{2x} \Leftrightarrow \boxed{y_p = -\frac{1}{2}e^{2x}}$$

3ª Etapa: Finalmente, a solução geral é $y = y_H + y_p$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b) $y'' + y = \underset{b(x)}{tg\, x}, \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

1ª Etapa: T.P.C. $\rightarrow$ $y_H = C_1 \underset{\varphi_1(x)}{\cos x} + C_2 \underset{\varphi_2(x)}{\operatorname{sen} x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2ª Etapa: Nota: Como $b(x) = tg\,x$, neste exercício não dá para usar o $\overbrace{\text{método dos coeficientes indeterminados}}^{\text{última aula}}$

1º Passo: $y_p = C_1(x)\cos x + C_2(x)\operatorname{sen} x$

2º Passo: C. aux. $\varphi_1(x) = \cos x \rightarrow \varphi_1'(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad b(x) = tg\,x$

$\varphi_2(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow \varphi_2'(x) = \cos x$ $\quad a_2(x) = 1$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\ C_1'(x)(-\operatorname{sen} x) + C_2'(x)\cos x = \frac{tg\,x}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x) \times \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ -C_2'(x) \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times (-\operatorname{sen} x) + \underbrace{C_2'(x)\cos x}_{1 \times \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ C_2'(x)\operatorname{sen}^2 x + C_2'(x)\cos^2 x = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ C_2'(x)(\underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{=1}) = \operatorname{sen} x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\operatorname{sen} x \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ C_2'(x) = \operatorname{sen} x \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} C_1'(x) = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \\ C_2'(x) = \operatorname{sen} x \end{cases}}$$

3º Passo: $$\begin{cases} C_1(x) = \int -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx \\ C_2(x) = \int \operatorname{sen} x\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\ln|\sec x + tg\,x| + \operatorname{sen} x \\ C_2(x) = -\cos x \end{cases}$$

C. aux.

$$\int \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{1}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{\cos x}}\,dx$$

$$= -\underbrace{\int \sec x\,dx}_{\hookrightarrow \text{formulário}} + \int \cos x\,dx = -\ln|\sec x + tg\,x| + \operatorname{sen} x$$

4º Passo: $y_p = (-\ln|\sec x + tg\,x| + \operatorname{sen} x) \times \cos x + (-\cos x) \times \operatorname{sen} x$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_p = -\ln|\sec x + tg\,x|\cos x} + \cancel{\operatorname{sen} x \cos x} - \cancel{\cos x \operatorname{sen} x}$$

3ª Etapa: $y = y_H + y_p \Leftrightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \ln|\sec x + tg\,x|\cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c) $y''' - y'' - 4y' + 4y = e^{-2x} \to b(x)$

C. aux Regra de Ruffini

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	0 = resto

$r=1$

$r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \vee r = -2$

1ª Etapa: EDO linear homogénea associada: $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

1º Passo: $r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \vee r = 2 \vee r = -2$

2º Passo: $S.F.S = \{e^{x}; e^{2x}; e^{-2x}\}$

3º Passo: $y_H = c_1 \underbrace{e^{x}}_{f_1(x)} + c_2 \underbrace{e^{2x}}_{f_2(x)} + c_3 \underbrace{e^{-2x}}_{f_3(x)}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

2ª Etapa: Vou usar o método da variação das constantes
(Mas era possível usar o método dos coeficientes indeterminados → T.P.C.)

1º Passo: $y_p = c_1(x)e^{x} + c_2(x)e^{2x} + c_3(x)e^{-2x}$

2º Passo:

$n = 3$
↓
Ver sistema na planificação

C. aux. $f_1(x) = e^{x} \longrightarrow f_1'(x) = e^{x} \longrightarrow f_1''(x) = e^{x}$

$f_2(x) = e^{2x} \longrightarrow f_2'(x) = 2e^{2x} \longrightarrow f_2''(x) = 4e^{2x}$

$f(x) = e^{-2x} \longrightarrow f'(x) = -2e^{-2x} \longrightarrow f''(x) = 4e^{-2x}$

$b(x) = e^{-2x}; \quad a_3(x) = 1$

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{x} + c_2'(x)e^{2x} + c_3'(x)e^{-2x} = 0 \\ \boxed{c_1'(x)e^{x}} + 2c_2' e^{2x} - 2c_3'(x)e^{-2x} = 0 \\ \boxed{c_1'(x)e^{x}} + 4c_2'(x)e^{2x} + 4c_3'(x)e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{c_1'(x)e^{x} = -c_2'(x)e^{2x} - c_3'(x)e^{-2x}} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ -c_2'(x)e^{2x} - c_3'(x)e^{-2x} + 2c_2'(x)e^{2x} - 2c_3'(x)e^{-2x} = 0 \\ -c_2(x)e^{2x} - c_3'(x)e^{-2x} + 4c_2'(x)e^{2x} + 4c_3'(x)e^{-2x} = e^{-2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ c_2'(x)e^{2x} - 3c_3'(x)e^{-2x} = 0 \\ 3\boxed{c_2'(x)e^{2x}} + 3c_3'(x)e^{-2x} = e^{-2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \boxed{c_2'(x)e^{2x} = 3c_3'(x)e^{-2x}} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ 3(3c_3'(x)e^{-2x}) + 3c_3'(x)e^{-2x} = e^{-2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ 12c_3'(x)\cancel{e^{-2x}} = \cancel{e^{-2x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \boxed{c_3'(x) = \frac{1}{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ c_2'(x)e^{2x} = \underbrace{3 \times \frac{1}{12}}_{=\frac{1}{4}} e^{-2x} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ c_2'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{e^{-2x}}{e^{2x}} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \boxed{c_2'(x) = \frac{1}{4}e^{-4x}} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x)e^{x} = -\underset{(\times 3)}{\frac{1}{4}} \underbrace{e^{-4x} \times e^{2x}}_{\hookrightarrow e^{-2x}} - \frac{1}{12}e^{-2x} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x)e^{x} = -\frac{4}{12}e^{-2x} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -\frac{1}{3}\frac{e^{-2x}}{e^{x}} \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} \\ c_2'(x) = \frac{1}{4}e^{-4x} \\ c_3'(x) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

3º Passo:

$$C_1(x) = \int -\frac{1}{3} e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right) \int -3 e^{-3x} dx = \frac{1}{9} e^{-3x}$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{4} e^{-4x} dx = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{4}\right) \int -4 e^{-4x} dx = -\frac{1}{16} e^{-4x}$$

$$C_3(x) = \int \frac{1}{12} dx = \frac{1}{12} x$$

4º Passo: $y_p = \frac{1}{9} e^{-3x} \times e^{x} + \left(-\frac{1}{16} e^{-4x}\right) \times e^{2x} + \frac{1}{12} x e^{-2x}$

$\Leftrightarrow y_p = \frac{1}{9} e^{-2x} - \frac{1}{16} e^{-2x} + \frac{1}{12} x e^{-2x}$

$\Leftrightarrow y_p = \left(\frac{7}{144} + \frac{1}{12} x\right) e^{-2x}$

C. aux.

$$\underset{\times 16}{\frac{1}{9}} - \underset{\times 9}{\frac{1}{16}} = \frac{16-9}{144} = \frac{7}{144}$$

3ª Etapa: $y = y_H + y_p \Leftrightarrow y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \left(\frac{7}{144} + \frac{1}{12} x\right) e^{-2x}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} y''' + y'' - 5y' + 3y = 6 \operatorname{senh}(2x) \\ y(0) = 0 \; , \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 4 \end{cases}$

Nota: Como $b(x) = 6 \operatorname{senh}(2x)$ não podemos usar o método dos coeficientes indeterminados (diretamente)

1ª opção: Usar o método da variação das constantes (T.P.C. facultativo, muito difícil)

2ª opção:

$$b(x) = 6 \operatorname{senh}(2x) = 6 \times \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \underbrace{3e^{2x}}_{b_1(x)} - \underbrace{3e^{-2x}}_{b_2(x)}$$

Usar o método dos coeficientes indeterminados (duas vezes) → princípio da sobreposição dos efeitos

1ª Etapa: $\xrightarrow{T.P.C.} y_H = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-3x}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

2ª Etapa: $b_1(x) = 3e^{2x} \xrightarrow{T.P.C.} y_{p_1} = \frac{3}{5} e^{2x}$

3ª Etapa: $b_2(x) = 3e^{-2x} \xrightarrow{T.P.C.} y_{p_2} = \frac{1}{3} e^{-2x}$

4ª Etapa: $y = y_H + y_{p_1} - y_{p_2}$ → pois era $b_1(x) - b_2(x)$

$\Leftrightarrow y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-3x} + \frac{3}{5} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-2x}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

5ª Etapa: Usar as 3 condições extra para determinar c_1, c_2 e c_3

$y(0) = 0 \rightsquigarrow c_1 + c_3$

$y'(0) = 0 \rightsquigarrow c_1 + c_2 - 3c_3 = \frac{-28}{15}$ ... $\begin{cases} c_1 = -\frac{2}{3} \\ c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$

$y''(0) = 4 \rightsquigarrow c_1 + 2c_2 + 9c_3 = \frac{44}{15}$

Então: $y = -\frac{2}{3} e^{x} + \frac{2}{5} e^{-3x} + \frac{3}{5} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-2x}$